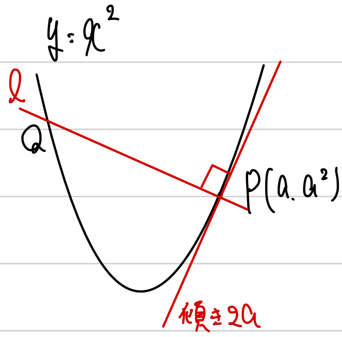
2025年　東大数学　文系第1問 ①

(1)



$y=x^2$ から $y'=2x$

なので、点Pにおける

接線の傾きは $2a$

$a>0$ に注意して、

l の傾きは $-\frac{1}{2a}$ なので

$l:\ y=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2$

lと$y=x^2$の交点として $x=a$ がわかっているので、$(x-a)$は展開しないままにしておく

Cとlを連立して

$x^2=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2$

$x^2-a^2+\frac{1}{2a}(x-a)=0$

$(x+a)(x-a)+\frac{1}{2a}(x-a)=0$

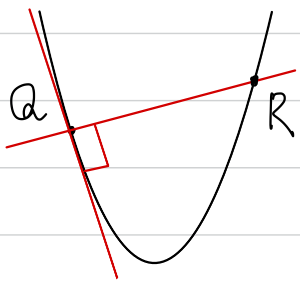
ちゃんと $x-a$ が共通因数として出てくる

$(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right)=0$

Qのx座標は $x\neq a$ の方なので

$x=-a-\frac{1}{2a}$ //

(2)



点Pから点Qを作る方法と、点Qから点Rを作る方法は全く同じ。

$b=-a-\frac{1}{2a}$ とすると。

オススメ 文字でおいて、計算しやすくする

Pのx座標 a に対し Qのx座標 $-a-\frac{1}{2a}$

Q : b : R : $-b-\frac{1}{2a}$

となる

ちなみに $a>0$ なので

$b=-a-\frac{1}{2a}<0$

Rのx座標は

$-b-\frac{1}{2b}$ …Ⓐ

$=-\left(a-\frac{1}{2a}\right)-\frac{1}{2\left(-a-\frac{1}{2b}\right)}$

$=a+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a+\frac{1}{a}}$

$=\frac{2a^2+1}{2a}+\frac{a}{2a^2+1}$ …Ⓑ

ⒶとⒷのどちらを使っても解ける

※さらに通分してもよいが、複雑すぎるので、一旦やめとく。

解法1-Ⓐ：Ⓐを使って相加相乗

(Rのx座標)$=-b-\frac{1}{2b}$ で $b<0$ より $(-b)>0$ $\left(\frac{1}{-2b}\right)>0$ なので

相加相乗平均の関係から

$$-b-\frac{1}{2b}\geq 2\sqrt{(-\cancel{b})\times\left(\frac{1}{-2\cancel{b}}\right)}=2\times\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

等号成立条件は

$-b=-\frac{1}{2b}$　$b^2=\frac{1}{2}$　$b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $(\because b<0)$

bの値はわかったが、aが存在することを示せていないので

aを求める

$b=-a-\frac{1}{2a}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる aが存在することを示す

$a+\frac{1}{2a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$2a^2+1=\sqrt{2}a$　$2a^2-\sqrt{2}a+1=0$

$a=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4\times2\times1}}{4}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-6}}{4}$ ◀虚数解になってしまった。

$a>0$の実数として得られなかったということは $b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる

bが存在しないということ。

ということは、Rのx座標の最小値$=\sqrt{2}$ となるbが存在しない

ということ。よって相加相乗では求められない。

別の方法で求めなければならない。

2025年　東大数学　文系第1問 ②

解法1-Ⓑ：Ⓑを使って相加相乗

$(R\text{の}x\text{座標}) = \dfrac{2a^2+1}{2a} + \dfrac{a}{2a^2+1}$ で $a>0$ なので、

相加相乗平均の関係から

$$\frac{2a^2+1}{2a} + \frac{a}{2a^2+1} \geqq 2\sqrt{\frac{\cancel{2a^2+1}}{2\cancel{a}} \times \frac{\cancel{a}}{\cancel{2a^2+1}}}$$

$$= 2\times\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

等号成立条件は

$\dfrac{2a^2+1}{2a} = \dfrac{a}{2a^2+1}$　$(2a^2+1)^2 = 2a^2$　$2a^2+1 = \sqrt{2}a$

$2a^2 - \sqrt{2}a + 1 = 0$　$\therefore\ a = \dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-8}}{4}$　◀やっぱり虚数解

Ⓑで相加相乗をしてもやっぱりダメ。他の方法を検討

コラム

過去の東大入試において、分数関数の最大最小は、
相加相乗平均の関係を使えば解けた。
しかし、この問題では、この法則が崩れてしまった!!
今後、相加相乗以外の方法も使えるようにしておこう
代表例は、「$=k$」とおいて、解の配置（逆像法）

解法2-Ⓐ：Ⓐで解の配置（逆像法）

$(R\text{の}x\text{座標}) = -b - \dfrac{1}{2b} = k$ とおく。

分母を払い、　$-2b^2 - 1 = 2bk$

$2b^2 + 2kb + 1 = 0$　…(*)

解の配置に持ち込んだ。逆像法の考え。

bが、bの範囲内に実数解を持つような kの範囲を求めればよい。

しかし、bの範囲をまだ求めていないので、一度、より道して、求める

より道して $b \leqq -\sqrt{2}$ を求める

より道スタート

方法あ　相加相乗を使う

$b = -a - \dfrac{1}{2a}$ より　$-b = a + \dfrac{1}{2a}$ なので、

相加相乗平均の関係より

$-b = a + \dfrac{1}{2b} \geqq 2\sqrt{a \times \dfrac{1}{2a}} = 2\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{2}$

等号成立条件は、$a = \dfrac{1}{2a}$　$a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$(\because a>0)$

よって　$-b \geqq \sqrt{2}$　$b \leqq -\sqrt{2}$　◀これが bの範囲

※ Rのx座標の最小値を求めるのには、相加相乗が不可（対応するaが存在しない）

が、bの範囲を求めるのには、相加相乗が使える。（対応するaが存在する）

方法い：解の配置（逆像法）を使う

面倒

$b = -a - \dfrac{1}{2a}$ の分母を払って、$2ab = -2a^2 - 1$

「b=」があるので わざわざ「=k」とおく必要がない。

$2a^2 + 2ba + 1 = 0$

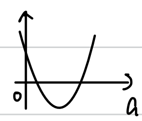
これが $a>0$ に少なくとも1つ解を持てばよい。

$f(a) = 2a^2 + 2ba + 1$ とおく。

$f(a) = 2\left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2} + 1$ より　軸: $a = -\dfrac{b}{2}$

(i) 重解または2解を持つ場合

$D \geqq 0$ かつ 軸>0 かつ $f(0)>0$



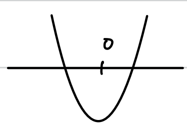
$$\begin{cases} D/4 \geqq 0 \text{ より} & (-b)^2 - 2\times 1 \geqq 0 & b^2 \geqq 2 \\ \text{軸}>0 \text{ より} & -\dfrac{b}{2} > 0 & b<0 \\ f(0)>0 \text{ より} & 1>0 & b\text{はすべての実数} \end{cases}$$

$b^2 \geqq 2$ かつ $b<0$ かつ すべての実数より、$b \leqq -\sqrt{2}$

(ii) $a \leqq 0$ と $0<a$ に 1解ずつ持つ場合

$f(0) = 1$ より　bは解なし

切片>0



以上より　$b \leqq -\sqrt{2}$ または 解なし なので

$b \leqq -\sqrt{2}$　◀bの範囲

ここは全部bの範囲を求めている

2025年　東大数学　文系第1問③

より道から戻り。

$(\ast)$ … $2b^2+2kb+1=0$ が

$b \leqq -\sqrt{2}$ の範囲に、少なくとも1つ解を持てばよい。

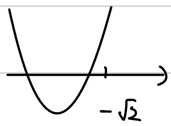
$g(b)=2b^2+2kb+1$ とおく。

$g(b)=2\left(b+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{2}+1$ なので、軸：$b=-\frac{k}{2}$

(i) 重解または2解を持つ場合。

$D \geqq 0$ かつ 軸 $\leqq -\sqrt{2}$ かつ $g(-\sqrt{2}) \leqq 0$

$D/4=(-k)^2-2\times 1 \geqq 0$　$k^2 \geqq 2$



軸 $\leqq -\sqrt{2}$ より　$-\frac{k}{2} \leqq -\sqrt{2}$　$k \geqq 2\sqrt{2}$

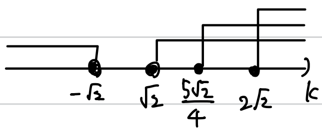
$g(-\sqrt{2}) \leqq 0$ より　$2(-\sqrt{2})^2+2k(-\sqrt{2})+1 \leqq 0$

$4-2\sqrt{2}k+1 \leqq 0$

$k \geqq \frac{5}{2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$

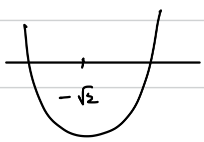
$k^2 \geqq 2$ かつ $k \geqq 2\sqrt{2}$ かつ $k \geqq \frac{5\sqrt{2}}{4}$ より

$k \geqq 2\sqrt{2}$



(ii) $b \leqq -\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}<b$ に1解ずつ持つ場合。

$g(-\sqrt{2}) \leqq 0$



$g(-\sqrt{2})=4-2\sqrt{2}k+1 \leqq 0$

$k \geqq \frac{5\sqrt{2}}{4}$

以上より、$k \geqq 2\sqrt{2}$ または $k \geqq \frac{5\sqrt{2}}{4}$ なので

$k \geqq \frac{5\sqrt{2}}{4}$ //

解法2-Ⓑ：Ⓑで解の配置（逆像法）

(Rのx座標) $=\frac{2a^2+1}{2a}+\frac{a}{2a^2+1}=k$ とおく

分母を払って、

$(2a^2+1)^2+2a^2=k\times 2a(2a^2+1)$

$4a^4+4a^2+1+2a^2=2ka^3+2ka$

$4a^4-2ka^3+6a^2-2ka+1=0$ ◀ aの4次式なので、やりづらそう。

これが $a>0$ に少なくとも1つ解を持つような k の範囲を求める。

$h(a)=4a^4-2ka^3+6a^2-2ka+1$ とおく。

$h'(a)=16a^3-6ka^2+12a-2k$ ◀ 因数分解不可

増減調べられず。挫折。